



Revista MICA.
Volumen 6 No. 11.
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero - Julio de 2023
Tepic, Nayarit. México
Pp. 1 - 40
Recibido: enero 15 de 2023
Aprobado: febrero 20 de 2023

Las funciones de la analogía en el proceso de modelación matemática

The functions of analogy in the process of mathematical modeling

Dr. Gildardo Cortés Bello

Instituto Tecnológico de Acapulco
gildardo.cb@acapulco.tecnm.mx

M.C. Rodolfo Daniel Arrieta Bonilla

Facultad de Matemáticas UAGro
arrieta.d@hotmail.com

M.C. Marisol Ramírez García

Instituto Tecnológico de Acapulco
marisol.rg@acapulco.tecnm.mx

Las funciones de la analogía en el proceso de modelación matemática

The functions of analogy in the process of mathematical modeling

Resumen

En este artículo presentamos un aspecto de la analogía poco conocido, hablamos sobre sus funciones en el proceso de modelación; nos preguntamos, cuál es la función específica del uso de la analogía, cómo emerge durante su uso, y cómo es utilizada por los estudiantes de ingeniería en el Instituto Tecnológico Campus Acapulco (ITCA). Realizamos una investigación desde la perspectiva teórica de la Socioepistemología (Cantoral, 2013) sobre la analogía; reportamos evidencias de que la analogía en ciertos entornos es considerada como un método de razonamiento, que permite establecer la existencia de atributos idénticos entre las partes de entes diferentes; analizamos los entornos, encontrando evidencias de las funciones de la analogía a través de la metodología de investigación de diseños (Confrey, 2006).

Palabras clave: La analogía, procesos de modelación

Abstract

In this article we present a little-known aspect of analogy, we talk about its functions in the modeling process; we ask ourselves, what is the specific function of the use of analogy, how it emerges during its use, and how it is used by engineering students at the Instituto Tecnológico Campus Acapulco (ITCA). We carry out an investigation from the theoretical perspective of Socioepistemology (Cantoral, 2013) on analogy; We report evidence that analogy in certain environments is considered a method of reasoning, which allows establishing the existence of identical attributes between the parts of different entities; We analyze the environments, finding evidence of the functions of the analogy through the design research methodology (Confrey, 2006).

Keywords: The Analogy, modeling processes

Introducción

En nuestro trabajo, no podemos concebir separadamente a la analogía de la modelación matemática de fenómenos, por esa razón nosotros hemos adoptado la concepción de modelación como una práctica convivencia, que consiste en un proceso que articula a dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra. En el proceso de modelación como práctica convivencia la diversidad de las entidades que intervienen en la articulación y naturaleza de la intervención hacen posible identificar a la

modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades (Arrieta y Díaz, 2015, pp. 34-45).

En la actividad de modelar un fenómeno se ejercen ciertas acciones, una de ellas es la búsqueda de características comunes entre dos fenómenos a través de la comparación, es en esta parte del proceso cuando emerge la analogía como una herramienta o como un método, que permite caracterizar y articular propiedades semejantes de los entes a intervenir. En esa dirección nuestro objetivo está centrado en evidenciar las funciones de la analogía mediante la modelación de fenómenos o situaciones diversas.

Revisión bibliográfica

En Acevedo, J. M. (2004, pp. 188-205), se reporta la historicidad de los usos de la analogía durante el siglo XVIII, de cómo la teoría de la gravitación de Newton sirvió como fuente de analogía para el desarrollo de la electricidad llevado a cabo por científicos como Cavendish, Coulomb y Maxwell, entre otros. Así mismo, Oliva, J. M. (2008, pp.15-28), evidencia que son pocos los estudios que analizan de cómo los profesores usan la analogía en su práctica docente, aun cuando las prácticas docentes no siempre son concebidas y usadas de un modo acorde con las implicaciones de la investigación educativa.

En las investigaciones realizadas por Arrieta y Diaz (2015, p. 44) citando a Méndez (2008) menciona la forma en que los estudiantes construyen una red de modelos de lo lineal a partir de la modelación de la elasticidad de un resorte, al intentar modelar con la misma red otro fenómeno. Es posible que los actores conformen una red de modelos con un determinado fenómeno; sin embargo, la red no será estable hasta que salga del fenómeno, es decir, la red de modelos no será estable hasta que no se establezcan analogías con otros fenómenos.

De lo anterior dicho, consideramos que la modelación, es una práctica que al ejercerse involucra otras prácticas para la construcción de herramientas matemáticas; esto significa, que la modelación está conformada por una red de prácticas y herramientas matemáticas, en donde emerge como herramienta auxiliar la experiencia. Así, tenemos que la experiencia obtenida a partir de la modelación del fenómeno original es la base para establecer la analogía e intervenir otro fenómeno para modelarlo.

Planteamiento del problema y justificación

En nuestro trabajo, a la analogía la concebimos como un proceso en el que intervienen sus funciones, mediante las cuales podemos establecer diversas conexiones entre fenómenos de diversa naturaleza y sus referentes matemáticos. En este sentido la relación entre la analogía y la modelación estriba en los vínculos establecidos a partir de las similitudes encontradas entre las partes de los fenómenos distintos de ahí su importancia no solo en el aula, sino también en el ejercicio de la modelación a partir de la experimentación de fenómenos de diversa naturaleza para el desarrollo de la ciencia y la explicación de ciertas teorías científicas.

Los programas de estudio del modelo educativo, que actualmente tiene el Instituto Tecnológico Campus Acapulco (ITCA), quien depende del Tecnológico Nacional de México (TecNM), se exige la formación de ciertas competencias genéricas en el estudiante, una de ellas es la modelación, esto implica que los profesores deben conocer los procesos de modelación. De lo anterior visualizamos que la modelación matemática de fenómenos es un tema que en los actuales programas de estudio de matemáticas del ITCA no incluyen la forma de cómo introducir a los estudiantes en los procesos de modelación de fenómenos, se asume que el profesor sabe modelar. En los programas de estudio se establece como competencia previa, que el estudiante pueda obtener un modelo matemático de un enunciado, esto significa que el estudiante sabe aplicar los conceptos básicos de la matemática para modelar, ya que es prerrequisito para el aprendizaje de cada una de las asignaturas de matemáticas (cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales), en particular las asignaturas de primer semestre de los respectivos cursos de ingeniería. Esto trae como consecuencia la inquietud de considerar este caso como un problema de investigación sobre cómo los estudiantes pueden involucrarse en los procesos de modelación matemática.

Nuestro problema y tema de investigación se justifican por sí mismos, ya que en el ITCA los expertos en educación afirman; por ejemplo, que el programa de álgebra lineal aporta al perfil del ingeniero, la capacidad para desarrollar un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico al modelar fenómenos de naturaleza lineal y resolver problemas, por tal motivo se espera que el egresado pueda aplicar conocimiento matemático, para

resolver problemas de la vida laboral y cotidiana, a través de la modelación. En esta dirección, la modelación matemática de fenómenos es una competencia que contribuye a la formación de las competencias laborales y profesionales en ITCA.

Hemos situado este problema en la línea de investigación, que estudia la relación entre las prácticas de modelación y la construcción de conocimiento matemático, particularmente aquellas prácticas de modelación y la construcción de modelos en el contexto del laboratorio virtual de ciencias en dónde emerge como principal herramienta las funciones de la analogía.

Metodología

Tratamos los antecedentes de la modelación bajo la perspectiva de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013) y la concepción de la modelación de Arrieta y Díaz (2015); así como los aspectos metodológicos de la Ingeniería Didáctica que hemos adoptado. En esta parte de la investigación hay elementos que solo pueden ser cubiertos con una metodología adecuada, como es lo que versa sobre lo que se hace en entornos físicos y lo que se hace en entornos matemáticos, y que es necesario introducir en los procesos de modelación matemática, particularmente en la construcción de los Diseños de Aprendizajes (DA), que hemos aplicado para recoger las evidencias. Nos referimos a una metodología de investigación de diseño (Confrey, 2006, pp. 135-152) que involucra al estudiante como un ser situado en un espacio y en un tiempo, esta metodología es la que más se ajusta a nuestros propósitos.

En nuestra línea de Investigación se involucra a las prácticas convivencia de modelación de fenómenos y se fundamenta en el Dasein Gei de Heidegger, que evoca al hombre echado al mundo situado, haciendo algo en un contexto referenciado a lo que hace, por qué lo hace, como las intenciones; cómo lo hace los procedimientos, con que lo hace, las herramientas y sus justificaciones los argumentos (Berciano, M. 1992, pp. 435-450).

Escenario experimental.

Los resultados de nuestro análisis fueron obtenidos a partir de la participación de 20 estudiantes del primer año de ingeniería del ITCA. Los estudiantes se organizaron en cinco

equipos de cuatro estudiantes, las evidencias se recopilaban con videograbaciones y las producciones electrónicas (hojas de cálculo) y físicas (cálculos en papel). Han participado en diseños de aprendizaje que caracterizan a la modelación inversamente proporcional. Estos, que los modelos inversamente proporcionales son aquellos en el que el producto de las variables es constante o “cuasi constante” si consideramos ruido en los datos.

Con esta finalidad elaboramos diseños de aprendizaje basados en el tránsito de un modelo que relaciona la fuerza entre dos cargas eléctricas a un modelo de la fuerza de atracción de dos masas. Para llegar a este diseño los estudiantes participan previamente en tres diseños. El primero referente a la modelación lineal del llenado de un estanque cilíndrico (Méndez, 2008), el segundo con base en la modelación inversamente proporcional del tiempo de vaciado de un vaso respecto del número de hoyos que tiene (Olea, 2011, pp.61-64) y el tercero la modelación de la fuerza entre dos cargas eléctricas (Cortés, 2013).

El diseño de aprendizaje: DA_ La ley de Coulomb

En nuestro trabajo, la situación que estamos abordando se basa en la modelación de fenómenos análogos, a partir de una red de modelos en donde la red del modelo de uno de ellos es conocida y sirve de base para modelar el otro fenómeno, a través de la analogía. Los aspectos epistemológicos de ciertos fenómenos nos permiten construir diseños de aprendizajes para lo inversamente proporcional (IP), cuya estructura siguen el esquema de la fig. 1 y 2.

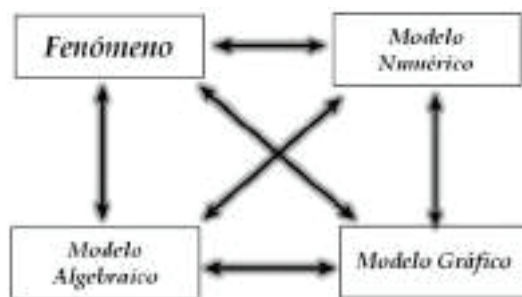


Fig. 1: Articulación de los referentes matemáticos con el fenómeno, a partir de una “Red de Modelos”, para lo IP.

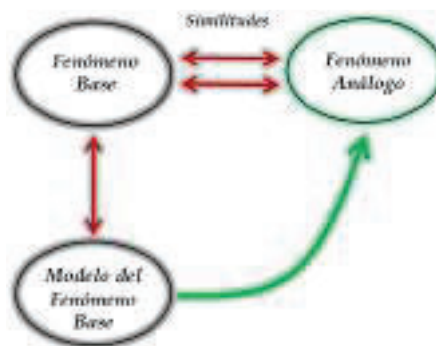


Fig. 2: Articulación de los referentes matemáticos del fenómeno base con el fenómeno análogo, a partir de la “Red de Modelos” del fenómeno base, para lo IP.

El análisis epistemológico de los diseños de aprendizajes para lo inversamente proporcional consiste en el análisis de la naturaleza de las prácticas con vivencia, la forma en que viven las prácticas de modelación en las comunidades en donde se originaron y la forma en que son modificadas y transferidas a otros contextos.

El resultado de este análisis permite diseñar nuevas prácticas; nuestra intención en este caso son las prácticas de modelación de lo inversamente proporcional, a partir del fenómeno que hemos denominado “el tamaño de la zancada”; el esquema de la fig. 3 da una orientación para su construcción.



Fig. 3: Esquema para la práctica experimental: El tamaño de la Zancada

En este proceso se considera, que la experiencia es una práctica prolongada, que proporciona conocimiento o habilidad para hacer algo, esto a su vez es el motor generador de conocimiento, en ese sentido la experiencia nos remite a nuevas prácticas de

modelación, a las que hemos denominado prácticas convivencia de modelación, en la construcción de conocimiento.

La modelación de la fuerza entre dos cargas eléctricas (Ley de Coulomb) la realizan a partir de la experimentación y toma de datos con un simulador digital. Primero, los estudiantes mantienen fija la magnitud de una carga y varían la magnitud de la otra carga. Después varían la distancia entre las cargas manteniendo fija las magnitudes de las cargas. Con los datos obtenidos en el primer caso, construyen modelo un lineal de la fuerza con respecto de la magnitud de las cargas. Con los datos obtenidos en el segundo caso construyen un modelo inversamente proporcional al cuadrado.

El esquema para la **Ley de Coulomb** queda determinado en la figura 4 (red de modelos fig. 1 y 2). Nuestra intención con este diseño es que los estudiantes logren construir lo inversamente proporcional y lo inversamente proporcional al cuadrado.

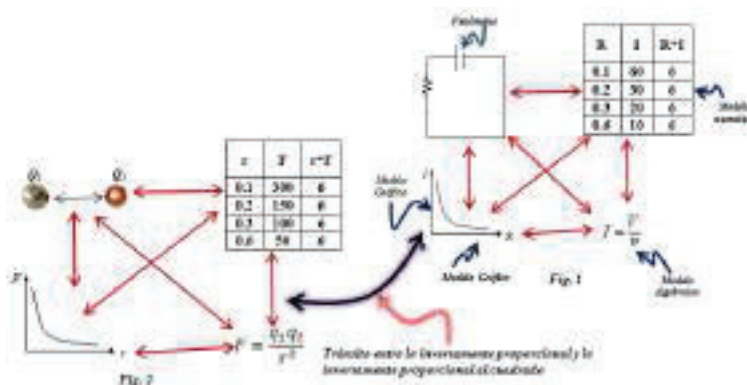


Fig. 4: Esquema para la ley de Coulomb (Red de modelos fig.1 y fig. 2)

La ley de gravitación universal de Newton.

Con la experiencia de modelar la fuerza entre dos cargas y haciendo uso de la analogía puedan modelar la ley de gravitación universal de Newton. La propuesta es que discutan en equipo, las preguntas: ¿Por qué caen los objetos?, ¿Caen o se atraen?, ¿Por qué gira la luna alrededor de la tierra?, ¿Si colocas dos cuerpos en una mesa se atraen o se rechazan?, ¿Qué pasa si están en el espacio?; para dar respuesta a dichas preguntas

mostramos los aspectos teóricos, que nos permiten predecir la interacción de los estudiantes en la experimentación

La analogía.

En nuestro trabajo de investigación hemos concebido a la analogía como un proceso de articulación de los elementos y de las relaciones de una entidad uno (E_1) con los elementos y de las relaciones de una entidad dos (E_2). En el proceso de articulación de los elementos y relaciones entre las dos entidades E_1 y E_2 la analogía se caracteriza por su intencionalidad, que conlleva a conocer a los elementos y las relaciones de la entidad E_2 a partir de su articulación con los elementos y relaciones de una entidad E_1 ya conocidos.

La construcción de la analogía se inicia con una interacción o experimentación (fase uno) en un sentido amplio de la entidad a conocer (E_2), en esta interacción identifico a los elementos y a sus posibles relaciones; en una segunda fase planteamos relacionarlos o articular a los elementos identificados con los elementos de la entidad conocida (E_1); en una tercera fase establecemos la analogía y verificamos que funciona, desde nuestros propósitos (*intencionalidad: modelar para intervenir, intervenir para predecir, etc.*), donde los elementos son los diferentes modelos que componen una red.

En general podemos decir que en la construcción de la analogía siempre estarán presentes tres componentes básicos referidos a las *entidades*, los *atributos* y las *relaciones* establecidas entre ellos conformando una red. En ese sentido se puede argüir que la analogía vive sobre una base construida en diseños de aprendizajes con *prácticas convivencia*, estableciéndose lo que hemos llamado *funciones de la analogía*, estas funciones se relacionan con los elementos que se articulan de las referidas entidades E_1 y E_2 .

La construcción de la analogía en nuestra investigación se consolida en un todo o unidad, a partir de la constitución de sus funciones referente a los *argumentos*, los

procedimientos, la *utilización* del referente construido y la función relacional que permite la intervención, a través de la experiencia vía la analogía.

Para nosotros en esta investigación, una práctica-con-vivencia (*P-C-V*) está referida a actividades recurrentes, que se ejercen en interacción. La referencia a convivencia tiene su fundamento en el constructo de la, *Dasein* *Gei de Heidegger*, que evoca al hombre echado al mundo situado, haciendo algo en un *contexto referenciado* a lo que hace, por qué lo hace, como las intenciones; cómo lo hace los procedimientos, con que lo hace, las herramientas y sus justificaciones los argumentos. (Berciano, M., 1990, pp. 135-152).

La práctica convivencia es un ente dinámico, que evoluciona en el tiempo que tiene su pasado, que explica porque ha llegado a ser como son y su horizonte que da cuenta de que es, lo que llegarán a ser: *las herramientas, los procedimientos, los argumentos y las intenciones*. Los aspectos mencionados son los que dan origen a las funciones de la analogía referente a:

- *La función argumentativa*
- *La función procedimental*
- *La función utilitaria o instrumental*
- *La función relacional.*

Las funciones de la analogía

La *función argumentativa* tiene su origen en las acciones durante la articulación de los argumentos e implica su validación de los argumentos para la entidad construida, destacando las similitudes que avalan las conclusiones extraídas de la entidad propuesta a partir de una regla, que sugiere una metodología propia de investigación. La función argumentativa se constituye en el dispositivo por el cual se formulan nuevos argumentos relativos a las caracterizaciones o relaciones que se dan entre las entidades propuestas y las entidades a construir, a partir de ciertas observaciones iniciales en una experimentación de la entidad propuesta. La construcción de la función argumentativa implica la elaboración de una tabla de caracterización de los fenómenos o entidades (E_1) y (E_2), además sugiere una metodología propia de investigación.

La *función procedimental*, tiene su origen en los procedimientos articuladores de las dos entidades en interacción E_1 y E_2 , en esta parte de la construcción de la analogía, se articulan las herramientas (modelo algebraico, numérico, gráfico) que pueden ser adoptadas por tener igual función en ambas identidades por analogar, aun cuando se trate de fenómenos distintos pero cuyos referentes matemáticos cumplan con las mismas propiedades de los números reales. La función procedimental se construye identificando a los elementos y estableciendo aquellos que tienen igual función en ambas entidades en interacción en la forma siguiente: Durante la experimentación se identifican y se miden la diferencia de las magnitudes tanto en la entidad (E_1) como en la entidad (E_2).

La *función utilitaria o instrumental* se refiere a la utilización de las herramientas (modelos algebraicos, numérico, gráfico), que funcionan como las herramientas, para un obrero en una fábrica o los utensilios de cocina para un chef. Esta función asigna significados a los modelos, está centrada en la utilización de los modelos y su funcionamiento como instrumentos de predicción, potencializando y diversificando la acción y forma de intervención. En esta función se realizan todas las acciones pertinentes referentes a la articulación de los parámetros de los diferentes modelos con los fenómenos y sus respectivas prácticas.

La *función relacional* permite articular, las redes de modelos y sus relaciones conceptuales con lo modelado, en esta función se producen por completo todas las funciones de la construcción de la analogía, destacándose la importancia de la naturaleza de la modelación, que dota de una caracterización a las prácticas de modelación, a través de la articulación y su intencionalidad de intervención.

Durante experimentación se hace necesario interactuar con la entidad que se desea intervenir y su red de modelos asociados a ella. En este proceso resulta, que la experimentación no es suficiente debido a que, al intervenir una identidad a partir de otra durante el acto de modelar, se obtienen nuevos elementos sujetos de análisis que permiten una configuración de las prácticas de modelación

Finalmente, en la construcción de un modelo vía la analogía, la sola experimentación no es suficiente, pues en el proceso de modelación, al intervenir una identidad a partir de otra, se obtienen nuevos elementos de análisis, que permiten configurar las prácticas de modelación, lo que significa nuevos arreglos entre los elementos y sus relaciones conceptuales que forman una red de modelos asociados con la entidad por modelar.

La configuración de las redes de modelos permite distinguir a la intencionalidad, dotando de los medios o herramientas para la caracterización de estas en el acto de modelar. De esto último, las funciones de la analogía permiten establecer las etapas de las prácticas convivencia de modelación al poner en escena el diseño experimental de la ley de Coulomb, que en nuestra investigación están referidas a:

- a) *La experimentación con el fenómeno, que establece las bases de lo convivencial*
- b) *La linealidad de la fuerza con respecto a las cargas*
- c) *La relación inversamente proporcional al cuadrado de la fuerza con respecto de las distancias de las cargas*
- d) *Establecer el campo de fuerzas referidas a la posición de las cargas.*

Las etapas de las prácticas convivencia dan lugar al establecimiento de la red de modelos asociadas al fenómeno base, y que es transferible al fenómeno análogo a partir de la caracterización de la red. El resultado de este análisis permite diseñar nuevas prácticas; nuestra intención en este caso son las prácticas de modelación de lo inversamente proporcional al cuadrado, a partir del fenómeno que hemos denominado “Ley de Coulomb”; el esquema siguiente da una orientación para su construcción.

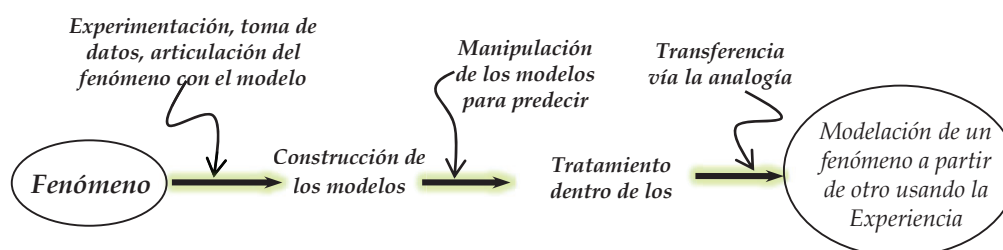


Fig. 5: Esquema de la analogía entre la ley de Coulomb y la de Gravitación Universal

Mediante la *función relacional* podemos construir el diseño de aprendizaje para la construcción de lo hiperbólico y lo hiperbólico al cuadrado como se muestra en la figura 4, en donde la analogía es la herramienta vinculadora de la red de modelos para la construcción de lo hiperbólico al cuadrado D3, a partir de fenómenos eléctricos D1 y D2.

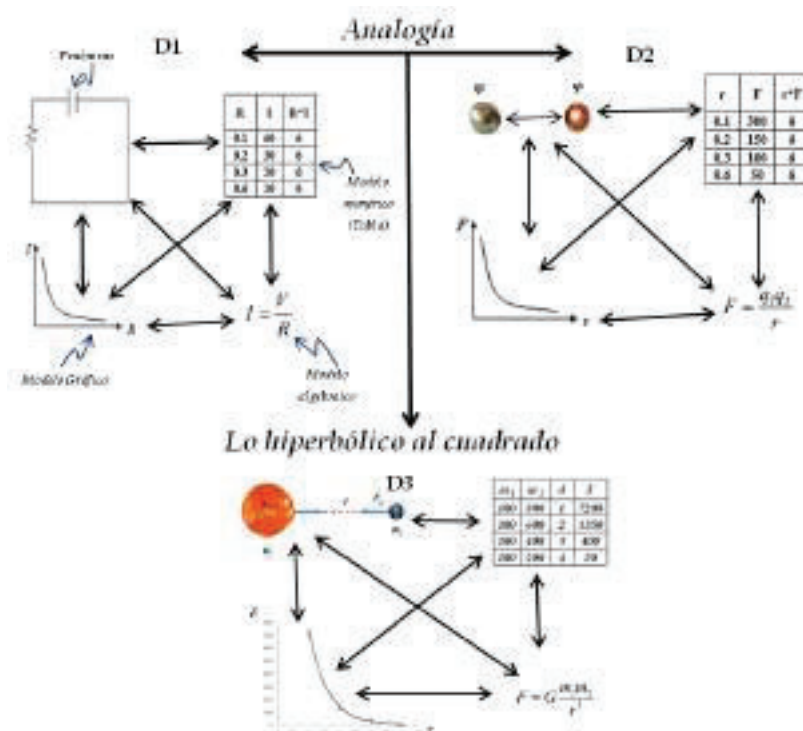


Fig. 6: Vinculación de una red de modelos D1 y D2, a través de la analogía para lo hiperbólico al cuadrado, para fenómenos gravitacionales D3

Las características básicas que nos interesa reconozcan los estudiantes en la ejecución de los diseños de aprendizajes (prácticas de modelación convivencia) es que:

- 1) *Distingan las variables que intervienen en el fenómeno base y el fenómeno análogo*
- 2) *Establezcan las relaciones que existen entre las variables*
- 3) *Distingan la relación entre los datos y las variables del fenómeno a modelar*
- 4) *Establezcan patrones de comportamiento con los datos obtenidos del fenómeno*
- 5) *Construyan un modelo y predecir con él.*

Resultados y Conclusiones

Mostramos como resultado el análisis de los datos durante la experimentación virtual, esto es, las evidencias de cómo trabajan los estudiantes del ITCA con el simulador coulomb en la fig. 7 y como trabajan las gráficas con Excel fig. 8

Análisis de los datos

La Experimentación virtual con dos cargas eléctricas



Fig. 7: Fotografías de como los estudiantes trabajan con el simulador



Fig. 8: Fotografías donde trabajan con graficas fuerzas y distancia

Los equipos trabajan con el simulador Coulomb para experimentar virtualmente, y tomar datos. La experimentación se realiza en equipos y toman datos en una hoja de cálculo (Excel). Se les proponen a los estudiantes, que exploren el simulador “Coulomb” y se fija un tiempo de 15 minutos para que ellos se familiaricen, figura 9.



Fig. 9: Estudiantes del equipo ET9 explorando el simulador Coulomb

Se experimenta y se toman datos en tres etapas, en una se fija la magnitud de la primera carga, la distancia a la que se encuentra la segunda carga, y variamos la magnitud de la segunda carga. Solo consideramos cargas del mismo signo, en este caso cargas positivas.

Los datos se capturan en Excel y después los escriben en la tabla que se les proporciona en el diseño de aprendizaje como lo muestra la fig. 10

Cargas eléctricas (μC)		Distancia entre las cargas (cm)	Fuerza entre las cargas (N)
q_1	q_2	d	F
10	5	5	91.8363
10	15	5	275.5102
10	25	5	479.1836
10	35	5	692.8571
10	45	5	826.5304
10	55	5	970.2040

Fig. 10: Tabla de datos obtenidos con el simulador Coulomb por el ET1

En la segunda experimentación, se fijan la magnitud de las cargas y se varían la distancia entre ellas. Ambas cargas se mantienen positivas en la experimentación como lo muestra la tabla de Excel del equipo ET4 figura 11.

Cargas eléctricas (μC)		Distancia entre las cargas (cm)	Fuerza entre las cargas (N)
q_1	q_2	d	F
10	80	0.10	12.0
10	60	0.20	1.5
10	40	0.30	1.0
10	20	0.60	0.5

Fig. 11: Tabla de datos del equipo ET4, se fija la magnitud de las cargas positivas en la experimentación y se varía la distancia entre ellas.

En la tercera experimentación, se fija la magnitud de las dos cargas y se hace variar la posición de la segunda carga de tal forma, que puedan obtener una figuración del campo de fuerzas fig. 12.



Fig. 12: Equipo ET2 del ITA manipulando el simulador, observan las cargas positivas y el campo magnético

Los estudiantes construyen, articulan la simulación entregada con el fenómeno a modelar, como lo muestra la actividad de los alumnos del ET2 en el Episodio 7.3.1.2.

El profesor y estudiantes del ET2

Episodio 7.3.1.2: La fuerza es proporcional a las cargas

Faustino ET2: ¿Ya entendiste cómo funciona el simulador?

Yasahandí ET2: Si, mira, si la carga es mayor la fuerza es mayor, y si la distancia es menor la fuerza es menor.

Liliana ET2: Pero ahí debes decir, que se repelen si son del mismo signo, si son de diferente signo se atraen.

Netzahualcóyotl ET2: La neta yo no le he entendido como le cambias las cargas

Faustino ET2: ¡Hay! ¿Dónde estabas? se le pone aquí la cantidad de carga y la regla.

Liliana ET2: No eso de la regla ya le entendí, ya sé cómo se le mueve. Lo que no le he entendido es porque mueves tanto una carga o sea cuando está aquí mueves acá, y las flechas que salen.

Faustino ET2, 1: Ha porque así nos lo pide el profe, no le estoy entendiendo nada

Liliana ET2: Es que la flecha que sale ahí...

Análisis

La simulación no solo consiste en el software que se propone exploren, sino en la articulación, que hacen los actores de las variables y procedimientos de la simulación con el fenómeno. En este episodio, se muestra cómo los estudiantes han articulado las variables y los procedimientos del simulador con las del fenómeno, a esto que han construido, es lo que llamamos la simulación.

La tecnología en este caso apoya las prácticas de experimentación. Mientras que Coulomb diseña sus aparatos experimentales, como la balanza de torsión; los estudiantes utilizan el simulador Coulomb. Reconocemos, que la distancia es enorme, pero una forma vivencial del fenómeno es a partir de su simulación. Este proceso de construcción de la simulación se da a partir de la analogía entre los elementos y procedimientos de la simulación, y los elementos y procedimientos del fenómeno.

La simulación no es el software, la simulación consiste en el proceso del estudiante, que articula el software con el fenómeno, que se intenta simular.

La linealidad de las cargas con respecto a la magnitud de las cargas

Los estudiantes modelan la fuerza de repulsión de dos cargas eléctricas con el mismo signo por un modelo lineal, cuando las variables son fuerza y magnitud de la carga

2.

Parten de los datos recopilados en la experimentación, donde mantienen fija la magnitud de la carga 1 y varían la carga dos, y la distancia se mantiene constante. El proceso de modelación de la fuerza entre la segunda carga por modelos lineales involucra diferentes formas de predicción, la construcción de diferentes modelos y el establecimiento de una red que los articula. Este procedimiento, es análogo al que se vive al modelar linealmente la elasticidad de un resorte (Arrieta, 2003, pp. 76-79). Proceso que han convivenciado anteriormente.

A continuación, se muestran evidencia en el Episodio 7.3.2.1 de cómo los estudiantes modelan la fuerza entre las cargas, si se varían la magnitud de la carga 2, la carga 1 y la distancia se mantienen fijas.

El profesor y estudiantes del equipo ET1

Episodio 7.3.2.1: La experimentación discursiva

Situación: Si la carga 2 tiene una magnitud de 38.8 microcoulomb.
¿Cuál es la magnitud de la fuerza?

Oscar ET1: Si multiplicamos 38.8 mc por la fuerza que aumenta por un microcoulomb te va a dar la fuerza.

Profesor: ¿Cuánto es?

Oscar ET1: Es 18 por 38.8 y da 698.8

Profesor: Pero en general, ¿ya sabes cuantos para una carga q_2 ?

Oscar ET1: Si es lo mismo como en el resorte, pero aquí el inicio es cero.

Profesor: ¿Cómo sería el modelo algebraico?

Oscar ET1: $F = 18q_2$

Se mantiene fija carga 1 y la distancia, como o muestra las figuras 13 y 14

q_1	q_2	d	F
20	5	10	90
20	10	10	180
20	15	10	270
20	20	10	360
20	25	10	450
20	30	10	540

Fig. 13: Tabla de datos del equipo ET4, se fijan la magnitud de las cargas positivas en la experimentación y se varía la distancia entre ellas.



Fig. 14: ET1 discutiendo los resultados obtenidos con el simulador Coulomb cuando la carga dos es 27 Coulombs

Profesor: ¿Cuándo la carga 2 es 27 Coulombs cuál es la fuerza?

Oscar ET1: Multiplicamos 18 por 27 y da 486

Análisis

Los estudiantes del equipo ET1 y ET4 modelan la fuerza entre dos cargas eléctricas, a partir de la variación la carga 2, analogando los elementos y procedimientos de la práctica de modelación de la elasticidad del resorte, usan el valor de la constante que es 18 y multiplican por el valor de la carga 2 que es 27 y obtienen 486, de esta forma los actores proceden para encontrar el valor de la fuerza para el valor de otra variación de la carga manteniendo las condiciones iniciales.

La modelación de la fuerza entre dos cargas con respecto a su distancia

Mostramos las evidencias de cómo los estudiantes modelan la fuerza entre dos cargas con respecto a la distancia entre ellas. El episodio 8.3.1.1 muestra cómo los estudiantes participantes argumentan y construyen sus herramientas para justificar sus resultados.

Campo vectorial entre dos cargas eléctricas

En esta sección se muestra, cómo los estudiantes del ITCA pueden visualizar el campo vectorial, a través de la interacción entre dos cargas eléctricas, así como su magnitud y la dirección de la fuerza figura 15 y 16.



Fig. 15: los equipos ET9 y ET8 interactuando con el simulador Coulomb y discutiendo los resultados obtenidos respecto al campo de fuerza generado por las cargas 1 y 2.

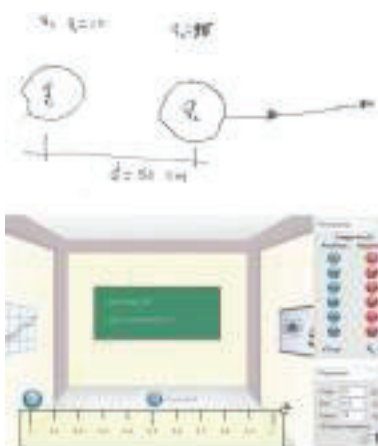


Fig. 16: Visualización de las líneas de fuerza que generan las cargas eléctricas q_1 y q_2 por el equipo ET9.

El episodio relativo a la construcción de la red de modelos lineales con el fenómeno muestra evidencia de las herramientas construidas por los estudiantes para modelar la fuerza y las distancias entre las cargas para lo hiperbólico al cuadrado.

La red de lo hiperbólico al cuadrado centrada en la fuerza entre dos cargas eléctricas

Los estudiantes construyen una red, que articula los modelos inversamente proporcionales al cuadrado con el fenómeno de la fuerza entre la distancia de dos cargas eléctricas.

La fuerza entre dos masas, la experimentación discursiva: la ley de gravitación

Esta parte de la puesta en escena de los diseños de aprendizaje comprende la Fase I, en donde los estudiantes del ITCA modelan la fuerza entre dos masas con base en la experimentación con el simulador Coulomb, variando la magnitud de la carga 2, la carga 1 y la distancia. Ahora los estudiantes variarán la magnitud de la masa 2 y la distancia entre ellas, la masa 1 permanece fija utilizando los valores propuestos por el profesor de los datos de la tabla de Excel figura 17.

<i>Masa en (kg)</i>		<i>Distancia (m)</i>	<i>Fuerza (N)</i>
m_1	m_2	d	F
10	10	1	
10	20	2	
10	30	3	
10	40	4	
10	50	5	

Fig. 17: Tabla propuesta por el profesor para los valores de las masas 1 y 2 en kilogramos, la distancia en metros

A continuación, se muestra como evidencia un extracto del episodio referente a la articulación de la transición entre el fenómeno eléctrico y el fenómeno gravitacional con la participación de los integrantes del equipo ET9 del ITCA

En el ITCA los estudiantes participantes obtuvieron resultados similares, sin lograr valores más precisos para la constante k, mostramos un fragmento del episodio 7.3.6.1 en

donde los estudiantes articulan los datos de la tabla correspondientes a las masas m_1 y m_2 para transitar entre el fenómeno eléctrico y el gravitacional.

El profesor y estudiantes del ET9

Episodio 7.3.6.1: Articulando la transición entre el fenómeno eléctrico y el fenómeno gravitacional

Profesor: *¿Cuál será la fuerza cuando la masa $m_1 = 10$ kg y la masa $m_2 = 10$ kg están separadas a una distancia de 1 metro?*

Miguel: 100 Newtons profe...

Profesor: *¿Por qué?*

Miguel: multiplicamos 10 por 10 obtuvimos 100 y dividimos por la distancia al cuadrado y me dio 100 ...

Profesor: *¿Cuál será la fuerza cuando la masa $m_1 = 10$ kg y la masa $m_2 = 20$ kg están separadas a una distancia de 2 metros?*

Miguel: 50 Newtons

Profesor: *Si la masa m_1 fuera 10 kg y la masa m_2 30 kg separadas a una distancia de 3 metros, ¿cuál sería la fuerza?*

Miguel: 33.3333 Newtons

Profesor: *¿Cuál será la fuerza cuando las masa $m_1 = 10$ kg y la masa $m_2 = 40$ kg están separadas a una distancia de 4 metros?*

Miguel: 25 Newtons

Profesor: *¿Cuál será la fuerza cuando las masa $m_1 = 10$ kg y la masa $m_2 = 50$ kg están separadas a una distancia de 5 metros?*

Miguel: 20 Newtons

Profesor: *¿Cómo obtuvieron sus resultados?*

Miguel: usando la fórmula de Coulomb

Profesor: *¿Puedes escribir el modelo para el fenómeno gravitacional?*

Miguel: Si... $F = Mm / d^2$



Fig. 18: Estudiantes del equipo ET9 discuten y articulan a partir de los datos de la tabla (valores de las masas 1 y 2, la distancia) propuesta por el profesor el tránsito de la ley de Coulomb a la ley gravitacional.

Masa

Si la ~~masa~~ es de 10 kilos una y otra de 10 la fuerza es 100, según la fórmula $f = \frac{q_1 q_2}{d^2}$

$$f = \frac{10 \times 10}{1^2} = 100$$

Si la masa es 10 y la otra es 20 la fuerza es 50

$$f = \frac{10 \times 20}{2^2} = \frac{200}{4} = 50$$

Si la masa es 10 y la otra es 30 la fuerza es 33.33333

$$f = \frac{10 \times 30}{3^2} = \frac{300}{9} = 33.3333$$

Si la masa es 10 y la otra es 40 kilos la fuerza es 25

$$f = \frac{10 \times 40}{4^2} = \frac{400}{16} = 25$$

Si la masa es 10 y la otra es 50 la fuerza es 20

$$f = \frac{10 \times 50}{5^2} = \frac{500}{25} = 20$$

Fig. 19: Cálculos realizados por estudiantes del equipo ET9 para la fuerza F con los valores propuestos para las masas m_1 y m_2 , para transitar hacia el fenómeno gravitacional a partir de la ley de Coulomb.

Análisis

Los resultados obtenidos por el equipo de Miguel son la evidencia del tránsito de la ley de Coulomb hacia la ley gravitacional en la cual emergen las funciones procedimental y relacional de la analogía; los valores para la fuerza gravitacional F entre dos masas m_1 y m_2 fueron obtenidos utilizando la ley de Coulomb en la cual puede observarse un error de precisión al no utilizar una constante k como ocurre con la ley de Coulomb, la función relacional de la analogía emerge parcialmente, ya que no establecen la relación entre la constante k y la constante G de gravitación, la figura 20 muestra el aspecto de la discursivo de la vinculación entre los parámetros del fenómeno eléctrico y el fenómenos gravitacional.



Fig. 20: Estudiantes del Equipo ET9 del ITCA discutiendo los resultados del fenómeno eléctrico y gravitacional

A continuación, mostramos un extracto del episodio referido a la experimentación argumentativa, donde estudiantes del ITCA articulan redes de modelos hiperbólicos cuadráticos para transitar del fenómeno eléctrico al fenómeno gravitacional, a partir de la experimentación argumentativa como una forma alterna. Inicia el profesor con el planteamiento de una situación experimental. Pide a Ricardo integrante del equipo ET9 del ITCA, que tome una hoja de papel y la comprima para hacer una especie de esfera, esto es simulando un cuerpo aproximadamente esférico y lo alcen a altura de su rostro, y lo deje caer fig. 21.



Fig. 21: Ricardo ET9 participante del ITCA deja caer una esfera de papel y observa que sucede.

El profesor empieza el cuestionamiento sobre la experimentación discursiva alterna con los estudiantes de los equipos participantes del ITCA respectivamente, observando que los estudiantes utilizan como principal herramienta argumentativa el discurso; esta característica es común en un proceso de modelación y, es muy razonable actuar así, ya que en cualquier situación experimental siempre se procede a teorizar tratando de justificar con los conocimientos previos los resultados obtenidos sobre lo observado.

El esquema de la figura 22 muestra lo que se hace en un entorno físico y lo que se hace en un entorno matemático durante un proceso de modelación, y las acciones relativas al acto de modelar para vincular los parámetros de las redes de modelos a los fenómenos en cuestión, a través de la función relacional de la analogía.

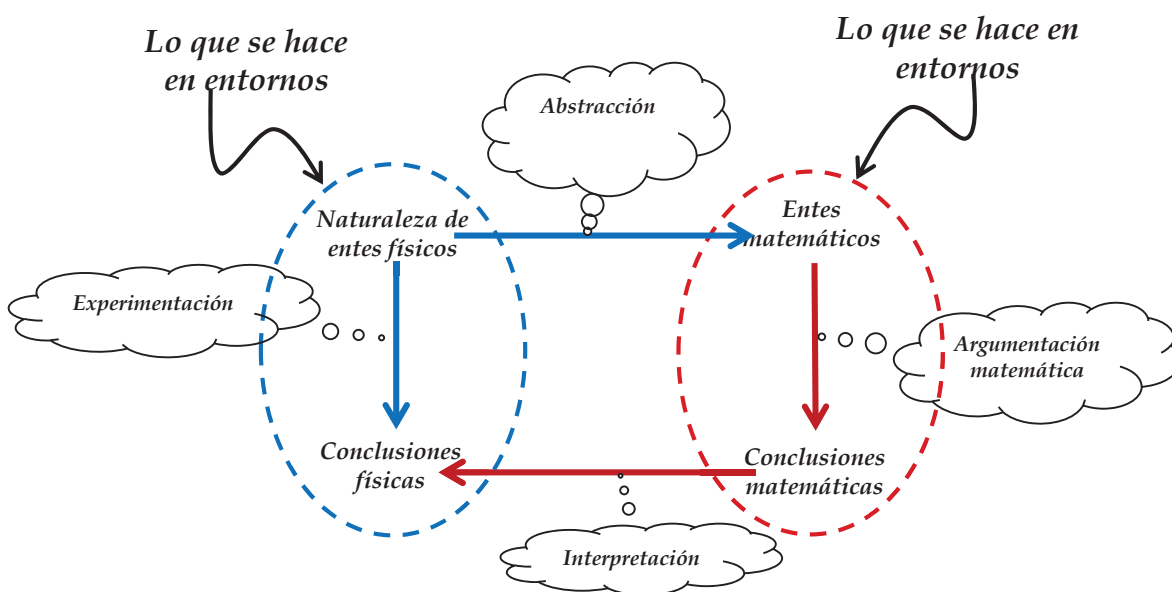


Fig. 22: Esquema sobre lo que se hace en la modelación en los entornos físicos y matematicos

En el esquema la parte izquierda ilustra lo que se hace en el estudio de un fenómeno físico, es decir, el proceso que se lleva a cabo para la formulación de hipótesis, teoría o leyes físicas, aplicando principalmente el método científico en la experimentación. En la parte derecha se muestra lo que se hace en el estudio de teoremas, propiedades, de entes matemáticos, es decir, muestra el trabajo de abstracción para extraer relaciones matemáticas entre teoremas, etc., aplicando algún método, como la deducción, la inducción o la analogía que se manifiesta en las acciones humanas para descubrir un cierto tipo de relación o propiedad, a través de sus funciones. En conjunto, el esquema explica cómo se puede realizar una transferencia vía las funciones de la analogía en una experimentación discursiva durante el acto de modelar de un entorno físico a un entorno matemático.

El episodio referente a la experimentación argumentativa muestra como herramienta el discurso para la articulación vinculación de los modelos.

El profesor y estudiantes del ET9, ET10

Episodio 7.3.6.2: Experimentación argumentativa: articulando redes de modelos hiperbólicos cuadráticos con el fenómeno eléctrico para transitar hacia el fenómeno gravitacional

Situación: *Dejando caer un objeto ¿qué pasa aquí?*

Profesor: *¿Por qué caen los objetos?*

Miguel Ángel ET9: Son atraídos al suelo por la gravedad...

Profesor: *Y ¿qué es la gravedad?*

Francisco ET9: Es la fuerza que tiene la tierra para que la atraiga hacia ella...no permite que salga hacia el espacio... es la fuerza que la tierra tiene para permanecer estables o estáticos sobre ella y no tener un descontrol sobre nosotros.

Profesor: *¿Caen o se atraen?*

Miguel Ángel ET9: Son atraídos por la fuerza de gravedad...se atraen

Profesor: *¿Por qué gira la luna alrededor de la tierra?*

Marcos ET10: Porque la gravedad hace que no se salga de su órbita y se mantenga dando vueltas dentro de su órbita alrededor de la tierra.

Profesor: *¿Si colocas dos cuerpos en una mesa se atraen o se rechazan?*

Francisco ET9: depende mucho de los objetos...si colocamos dos imanes despagados quedan estáticos, también depende mucho de la mesa, si la mesa está un poco inclinada los objetos pueden juntarse o igual pueden caerse de la mesa

Marcos ET9: Se quedan fijos a menos que haya una fuerza externa que intervenga como lo podría hacer si ponemos 2 imanes por lado de sus polos opuestos se atraerían rompiendo la gravedad.

Análisis

Del análisis de la experimentación argumentativa de los estudiantes de los equipos ET9 y ET10 del ITCA observamos que articulan los diversos elementos de juicio que tienen a su disposición para justificar sus producciones argumentativas surgidas a partir de la experimentación virtual con la práctica experimental “ley de Coulomb”. En la cuestión “*porque caen los objetos*” Miguel Ángel del ET9 argumenta que, es por causa de la gravedad que son atraídos, él afirma por intuición que no caen, esta intuición le viene de manera automática después de la experimentación con el simulador Coulomb, esto es coincidente con la respuesta que da en la cuestión “*caen o se atraen*”, su respuesta es la

misma “, “*Son atraídos por la fuerza de gravedad...se atraen*”, relaciona lo observado con el comportamiento de las cargas eléctricas uno y dos, y las masas 1 y 2.

Cuando se le cuestiona “*y, qué es la gravedad*” da como respuesta “*...es una fuerza*”, Francisco ET9 estudiante del mismo equipo de Miguel ángel argumenta “*es la fuerza que tiene la tierra*”. El resto de los estudiantes coinciden que la gravedad es la causa de que los objetos sean atraídos hacia la tierra, y que no caen más bien se atraen.

Esta percepción de los estudiantes es posible, solo por acción de la función relacional de la analogía, que les permite ver ciertas características comunes en ambos fenómenos. Por ejemplo, lo que hace que dos cargas distintas q_1 y q_2 se atraigan o se

rechacen es una fuerza, lo mismo sucede en el caso de dos masas distintas m_1 y m_2 lo que provoca que se atraigan o se rechacen, o bien en el caso de los objetos cercanos a la superficie de la tierra en lugar de caer sean atraídos por la tierra es una fuerza, y que esta fuerza depende del tamaño de las masas o de las cargas y de la distancia que hay de separación entre ellas.

En el episodio 7.3.6.3 se muestra cómo los estudiantes con base en los resultados de la Fase II de la experimentación con el simulador Coulomb explican la fuerza de gravedad como una alternativa en el acto de modelar.

**Episodio 7.3.6.3: La ley de Coulomb una transición para lo gravitacional
El profesor y estudiantes del ET9**

- Situación:** ¿Con base en la práctica anterior (la fuerza entre dos cargas) podrían explicar la fuerza de gravedad?
- Profesor:** *¿Es una fuerza entre ellas?*
- Miguel Ángel:** Si...porque los cuerpos se atraen unos a otros...produciendo ondas gravitacionales...
- Profesor:** *¿Qué pasa si están en el espacio?*
- Víctor Manuel:** flotarían...por la fuerza de gravedad...por la fuerza de gravedad
- Miguel Ángel:** no...en el espacio no hay gravedad...también dependen de las ondas gravitacionales...que son producidas por dos estrellas que giran entre si...producen ondas que se esparcen por el universo y que estén en constante movimiento

Análisis

El resultado de la puesta en escena de la forma alterna del diseño de aprendizaje muestra que la concepción de fuerza es la misma en ambos casos, los estudiantes consideran, que la gravedad es una fuerza, como la que hay en el fenómeno eléctrico.

Los integrantes del equipo de Miguel Ángel piensan de manera similar; las siguientes fotografías muestran como evidencia un fragmento del discurso de los integrantes del equipo ET9 del ITA figura 23.



Fig. 23: Fragmento del discurso de Francisco Javier y Miguel Ángel del equipo ET9 del ITCA, en donde consideran que la gravedad es una fuerza.

La articulación de las variables de los fenómenos, la fuerza entre dos cargas y la fuerza entre dos masas

En esta investigación, hemos teorizado sobre algunos aspectos de la modelación de fenómenos, particularmente sobre el acto de modelar; de esta manera, el acto de modelar se constituye como un acto de articulación de dos entidades para fines de intervención y el carácter de intervención, es de diversa naturaleza. Por ejemplo, desde la articulación de entes teóricos para la predicción hasta la validación de resultados teóricos obtenidos, a partir de la experimentación virtual o argumentativa de un fenómeno (Cortés, G., Arrieta, J., Tomas, E. 2014, pp. 1278-1281; Arrieta y Díaz, 2015, pp. 34-37).

De acuerdo con lo expuesto podemos decir que, durante el proceso de modelación en el acto de modelar, son las variables de interés las que se articulan en los diferentes modelos para los fenómenos en cuestión siguiendo los esquemas de la figura 24 y 25 abordados en el Capítulo 4 de esta investigación.

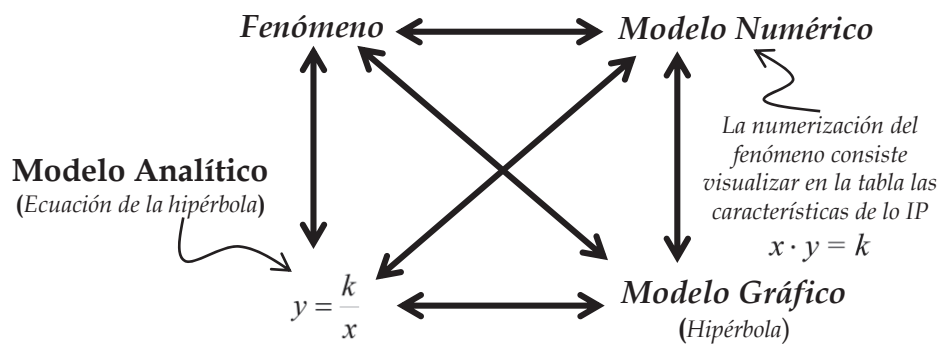


Fig. 24: Esquema del modelo propuesto para la articulación de las variables conformando una red de modelos vía la analogía.

El esquema de la figura 25 muestra la articulación de la red de modelos del fenómeno base y el fenómeno análogo durante el proceso de modelación y el acto de modelar.

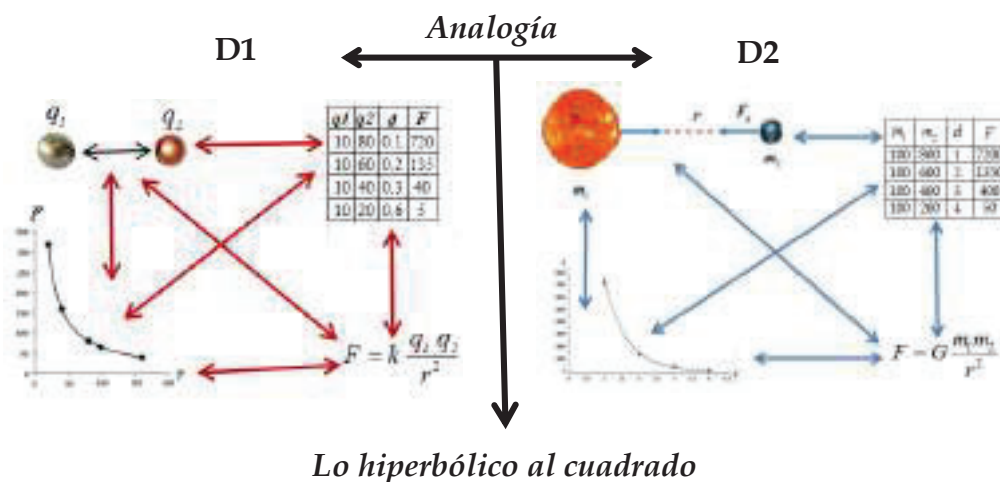


Fig. 25: Esquema del modelo propuesto para la articulación de las variables para fuerza entre dos cargas y la fuerza entre dos masas vía la analogía.

El episodio 7.4.1.1 muestra como evidencia la forma que tienen los integrantes del equipo ET8 del ITCA para articular las variables que intervienen en la experimentación discursiva de los diseños de aprendizajes en el acto de modelar. Para ello el profesor induce la actividad a través del planteamiento unas cuestiones.

Episodio 7.4.1.1: Ahhh... ¡es como lo que pasa en la ley de coulomb!

El profesor y estudiantes del ITCA ET8

Profesor: ¿Podría establecer la relación entre dos cuerpos con masa uno y masa dos, y una distancia de entre ellos?

Delia ET8: Si profe...la fuerza de atracción entre dos cuerpos es inversamente proporcional a la distancia que los separa al cuadrado... $F = \frac{G(Mm)}{d^2}$... $d = \text{distancia}$, $G = \text{gravedad}$: constante gravitacional, M y m : masa de los 2 objetos.



Fig. 26: Modelos pictográficos del equipo ET8, que relacionan la distancia con las cargas en el fenómeno eléctrico; la distancia con las masas en el fenómeno gravitacional.

Análisis

Las evidencias muestran, que los estudiantes del ITCA son coincidentes respecto a considerar a la gravedad como una fuerza, es decir, la masa es como las carga en el fenómeno eléctrico; si las masas están muy cerca, la fuerza es muy grande; si las masas están muy lejos, la fuerza es pequeña. Esta observación la realizan los estudiantes porque la experiencia previa con el simulador Coulomb, así sucede con el comportamiento de las cargas eléctricas.

En el caso del comportamiento de los objetos de gran tamaño es semejante al de las cargas eléctricas. En ambos casos tanto las cargas eléctricas como las masas son consideradas puntuales para que las redes de modelos ya construidas previamente por los estudiantes puedan vincularse de manera *ad hoc* en la *praxis* durante el acto de modelar; en la figura 7.67 se muestra un aspecto del acto de la modelación discursiva entre los participantes, como herramienta para la vinculación de los modelos en ambos fenómenos.

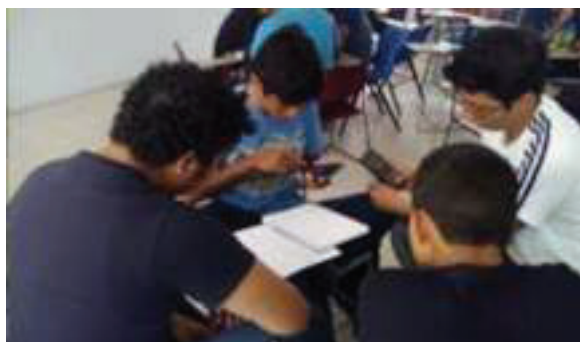


Fig. 27: Estudiantes del equipo ET10 del ITCA observando el comportamiento y discutiendo el comportamiento de las cargas uno y dos para construir la relación con las masas uno y dos en la experimentación argumentativa con base en la ley de Coulomb.

La red de lo hiperbólico al cuadrado

En el episodio 7.5.1.1 se muestra cómo los estudiantes del ITCA con base en los resultados de la Fase II de la experimentación discursiva explican la fuerza de gravedad como una alternativa en el acto de modelar figura 7.68.



Fig. 28: Estudiantes del Equipo ET9 del ITCA discutiendo los resultados del fenómeno eléctrico y gravitacional para establecer y construir la red de lo hiperbólico

El profesor plantea a los estudiantes la construcción de una red de modelos, que permita relacionar ambos fenómenos con sus modelos, a partir de los valores de la tabla de datos figura 7.69.

Variación de la masa m_1 y la distancia d

Masa (kg)		Distancia (m)	Fuerza (N)
m_1	m_2	d	F
10	10	1	
10	20	2	
10	30	3	
10	40	4	
10	50	5	

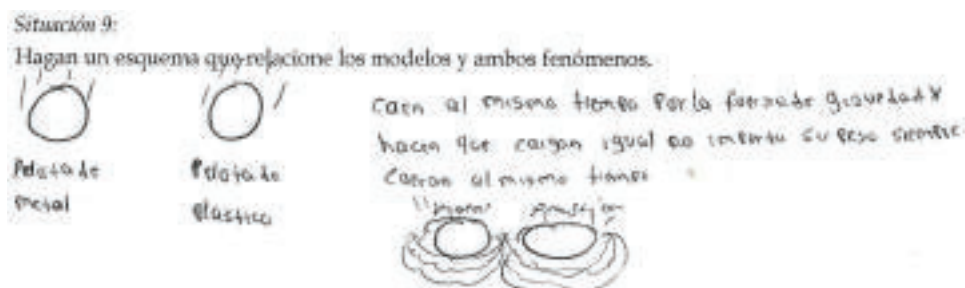
Fig. 29: Tabla propuesta para las masas 1 y 2, y la distancia d

Episodio 7.5.1.1: Establecimiento de redes de modelos hiperbólicos y explicación de fenómenos a partir de este modelo

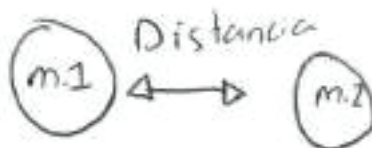
El profesor y estudiantes de los equipos ET8, ET9 y ET10 del ITA

Situación: Hagan un esquema que relacione ambos fenómenos

Marcos_ET10:



Marcos_ET9:



Marcos_ET8:



Fig. 30: Modelos pictográficos de los equipos ET10, ET9 y ET8, que relacionan la distancia con las cargas en el fenómeno eléctrico; la distancia con las masas en el fenómeno gravitacional.

En la figura 30 observamos que la construcción de la red de modelos realizada por los integrantes de los equipos, solo se limita a un modelo pictográfico, que surge a partir del

discurso como herramienta en el acto de modelar en la experimentación discursiva, un fragmento del episodio 7.5.1.1 muestra evidencia de ello.

El profesor y estudiantes de los equipos ET8, ET9 y ET10 del ITA

Episodio 7.5.1.1: Establecimiento de redes de modelos hiperbólicos y explicación de fenómenos a partir de este modelo

- Profesor:** *¿Porque gira la luna alrededor de la tierra?*
- Miguel ET9:** Porque la luna está cayendo y tiene su propia gravedad
- Delia ET8:** Porque la fuerza de gravedad de la tierra se mantiene ahí, porque hay una fuerza que la atrae y otra que la expulsa. La luna y la tierra ejercen fuerzas entre sí.
- Víctor ET10:** Porque la gravedad hace que no se salga de su órbita y se mantenga dando vueltas dentro de su órbita alrededor de la tierra.

Análisis

Los estudiantes de los equipos participantes coinciden en que la gravedad es una fuerza que obliga a la luna a orbitar en torno a la tierra; el equipo ET8 considera que hay una fuerza que hace que la expulse y otra que la atraiga, es decir, la tierra y la luna ejercen una fuerza entre sí, en tanto que el equipo ET10 afirma que la gravedad provoca que la luna siga una trayectoria orbital en torno a la tierra. En ambos casos, la construcción de una red de modelos solo se reduce a un pictograma, que relaciona ambos fenómenos y al discurso como herramienta.

Conclusiones

Durante la experimentación discursiva podemos decir que, el establecimiento de una red de lo hiperbólico al cuadrado descentrado de los fenómenos en el momento en que los actores utilizan los datos obtenidos de la experimentación, para intervenir en el fenómeno, se está ejerciendo la modelación y el fenómeno se convierte en lo modelado, y los datos en el modelo.

Los modelos que se articulan con los fenómenos resultan ser pictogramas, gráficas, ecuaciones, el propio lenguaje cotidiano normalmente conocido como discurso, etc. El proceso de articulación es un proceso interactivo, se propone algún modelo y se interviene con él al fenómeno, se propone otro y se vuelve a intervenir. Esto significa que el proceso de modelación es una práctica recurrente que consiste en articular dos entes para intervenir sobre uno de ellos al cual se le puede llamar lo modelado y al otro modelo. Durante este proceso en el acto de modelar emerge una red de modelos, que no están sujetos a un solo fenómeno, sino más bien es una red general de modelos, cuyos significados provienen de diversos fenómenos cuya relación, es solo de semejanza entre sus parámetros inmutables entre el fenómeno base (modelo) y el fenómeno análogo (lo modelado), para los actores que modelan, los modelos solo emergen cuando los utilizan para intervenir en lo modelado (Arrieta y Díaz, 2015, pp. 34-45)

La intención didáctica de la modelación de fenómenos a partir de un diseño de aprendizaje (práctica experimental) en contextos escolares, es que la analogía sirva como herramienta en la vinculación entre fenómeno y una red de modelos, para encontrar soluciones a problemas en contextos no escolares; otra intención es ver cómo los actores construyen sus propias herramientas, cómo modifican la práctica de modelación original, para construir otras prácticas, las cuales hemos llamado prácticas con vivencia.

En una práctica convivencia la analogía nos permite transitar de una situación conocida (fenómeno base) a otra situación desconocida (fenómeno análogo). Por ejemplo, cuando estudiamos los fenómenos relativos a las fuerzas eléctricas, a partir de la modelación vía la analogía con fuerzas gravitacionales, la problemática surgida no es simple, es compleja, entonces emergen *las funciones de la analogía* para hacer posible la modelación del fenómeno gravitacional, en nuestro caso creemos que es posible construir el modelo a partir de lo inversamente proporcional (IP) y inversamente proporcional al cuadrado (IPC) en fenómenos eléctricos y extenderlos a los fenómenos gravitacionales, solo si construimos lo hiperbólico y lo hiperbólico al cuadrado con los diseños correspondientes.

En nuestro trabajo hemos cuestionado la caracterización de los fenómenos IP cuyos referentes son del tipo lineal y cuadrático, además del discurso argumentativos de los actores al transitar de una situación contextual a otra, en donde emergen la forma de predecir elemental en situaciones que tienen regularidades constantes, es una forma simple y recurrente de predecir, y en situaciones más complejas recurren a la forma de predecir fundamental, que es una forma más generalizada en la predicción.

La analogía transporta coloquialmente, los elementos de una práctica convivenciada a elementos funcionales a una práctica emergente. Sin embargo, esta transposición no puede ser de forma mecánica, sino que solo se da respetando los elementos del contexto. Por ejemplo, aun cuando la estructura matemática, que subyace a las situaciones del tamaño de la zancada, los pintores, el vaciado del líquido de un recipiente es la misma, una situación que involucra variables inversamente proporcionales, los actores proceden con diferentes herramientas, procedimientos, argumentos diferentes en cada caso. Esto implica que hay formas de predicción inherentes a cada situación, a cada práctica convivencia para poder predecir, por eso hacemos una distinción entre la forma de predecir elemental y la forma de predecir fundamental.

La analogía nos permite modelar un fenómeno que no se encuentra en el entorno del estudiante, a partir de una red convivenciada. Para ello nos planteamos las siguientes etapas en la construcción de futuros diseños de aprendizajes y sus puestas en escena:

1. *La experimentación discursiva con el fenómeno*
2. *La identificación de las variables*
3. *La construcción de una red de lo hiperbólico al cuadrado descentrada del fenómeno.*
4. *La fuerza de la analogía se ve presente al transponer los elementos de una práctica convivencia como herramienta en una práctica emergente.*

En la praxis podemos concluir que resulta muy *ad hoc* establecer conexiones entre las características de los parámetros que describen a un fenómeno, a partir de las analogías establecidas de otros fenómenos distintos, pero cuyo comportamiento es muy similar.

Una primera conclusión, es que *la analogía se manifiesta en las acciones humanas y no en los procesos matemáticos, utiliza la experiencia previa de haber interactuado con un hecho, el cual sirve de referencia para dar solución a otro hecho cuyas características son semejantes, de ahí que a través de una comparación los actores establecen conexiones, manifestándose en estas acciones el proceso analógico, el cual a su vez tiene diversos orígenes cultural y contextual.*

De lo anterior una segunda conclusión, es que la analogía es un procedimiento mediante el cual podemos establecer diversas conexiones, de esto encontramos que:

- *Hacer conexiones es parte de los procesos naturales de descubrimiento en la analogía.*
- *Los actores que establecen conexiones construyen redes de modelos para explicar, y predecir usando analogía implícita.*
- *Distinguimos dos formas de procedimientos analógicos a partir de: la analogía sensitiva que opera a partir de la impresión directa de los fenómenos sobre nuestros sentidos, y la referida a la forma y estructura, que consiste en considerar análogos a fenómenos que tienen una naturaleza diferente, y que poseen una estructura similar o se rigen por leyes semejantes.*
- *Hay analogías de diferentes niveles, que dependen de las características de los propios fenómenos, y de la habilidad de los actores para establecer relaciones ente ellos*

Una tercera conclusión es en relación con las características de los fenómenos base y análogo, que nos permiten establecer una analogía, están referidas al comportamiento de los parámetros de los modelos asociados a los fenómenos en cuestión, de ello da cuenta Coulomb, cuando establece la ley que lleva su nombre; en esta ley se da una descripción de las partículas cuyo comportamiento es muy semejante al comportamiento de los planetas y el sol. En ambos casos, se consideran a las masas puntuales, para establecer una fuerza de atracción entre los planetas y el sol; en el caso de las fuerzas eléctricas se consideran a las masas de las partículas puntuales.

En un segundo método experimental Coulomb utilizó un globo de 1 y 2 pies de diámetro para determinar la ley, según la cual el globo atrae a un pequeño cuerpo cargado de electricidad de una naturaleza diferente a la suya, en la figura 8.4 se muestra la balanza del experimento. (Cortés, 2016, pp.210-212)

Una cuarta conclusión la visualizamos sobre la función específica del uso de la analogía en la modelación matemática de fenómenos en Cortés (2016, pp. 213-214) afirma que:

[...] para un matemático la modelación la concibe desde la perspectiva filosófica de la matemática y de sus fundamentos, en estas perspectivas los matemáticos trabajan con modelos formales que justifican una teoría propiamente matemática haciendo uso de axiomas estableciendo relaciones entre los conceptos derivados de ellos dando origen a nuevos teoremas y teorías matemáticas. Para un físico los modelos matemáticos solo son referentes, que dan cuenta de ciertos patrones de comportamiento de los fenómenos naturales que les interesa investigar, como es la ley de gravitación universal y que está en constante cambio debido al avance tecnológico, que permite modificar la teoría física; de igual forma sucede con los patrones de comportamiento de sistemas biológicos, que solo son comprendidos por las comunidades de biólogos si se encuentra un modelo matemático que los describa.

Una quinta conclusión esta referida al nacimiento de la analogía, es decir, en nuestra investigación la modelación matemática de fenómenos en diversos contextos está referida a las prácticas realizadas por ciertas comunidades de profesionistas y de oficios, y cómo emigran estas prácticas a otras comunidades para dar solución a problemas que guardan una cierta similitud en sus parámetros que los determinan con los problemas que le dieron origen en las comunidades de donde provienen.

Por último, una sexta conclusión está referida a cómo es utilizada la analogía por los estudiantes de ingeniería en el Instituto Tecnológico Campus Acapulco. En relación con el uso de la analogía, el papel que desempeña la modelación en contextos escolares radica en:

- *La intención didáctica de la modelación de fenómenos a partir de un diseño de aprendizaje (práctica experimental), en donde la analogía sirva como una herramienta en la vinculación entre fenómeno y una red de modelos, para encontrar soluciones a problemas en contextos no escolares.*
- *Observar cómo los actores construyen sus propias herramientas, cómo modifican la práctica de modelación original, para construir otras prácticas, las cuales hemos llamado prácticas con vivencia.*

Referencias

- Acevedo, J. M. (2004), *El papel de las analogías en la creatividad de científicos: la teoría del campo electromagnético de Maxwell como caso paradigmático de la historia de las ciencias*, Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias (2004), Vol. 1, N° 3, pp. 188-205 ISSN 1697-011X. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/920/92001304.pdf>
- Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18 (1), pp. 19-48. Recepción: Septiembre 18, 2013 / Aceptación: Octubre 27, 2014. DOI: 10.12802/relime.13.1811. Recuperado de https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362015000100002
- Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de una matematización en el aula. Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
- Berciano, M. (1992). ¿Qué es realmente el “Dasein” en la filosofía de Heidegger? *Thémata. Revista de Filosofía*. Número 10, 1992, pág. 435-450. Recuperado de <https://institucional.us.es/revistas/themata/10/04%20berciano.pdf>
- Berciano, M (1990). La crítica de Heidegger al pensar occidental. Universidad Pontificia de Salamanca, Salamanca, pág. 135-152.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona España: Editorial Gedisa, S. A.
- Cortés, G. (2016). *La analogía en la construcción de redes de modelos, el caso de las leyes de Coulomb y de Gravitación Universal*. Tesis doctoral no publicada. Unidad Académica de matemáticas. Universidad autónoma de Guerrero. México.
- Cortés, G. (2013). La analogía, una fase de la modelación. *Acta de la XXVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27*, pp. 1277-1287. Argentina: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/5918/1/CortesLaanalogiaALME2014.pdf>
- Cortés, G; Arrieta, J; Torres, E. (2014). La analogía, una fase de la modelación. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1277-1287). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/5918/>
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press. Recuperado de https://assets.cambridge.org/97805218/45540/frontmatter/9780521845540_frontmatter.pdf

- Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de las prácticas: la experiencia al modelar linealmente situaciones análogas*. Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de matemáticas. Universidad autónoma de Guerrero. México.
- Olea, N. (2011). *Un estudio del papel de los contextos en la modelación inversamente proporcional*. Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de matemáticas. Universidad autónoma de Guerrero. México.
- Oliva, J. M. (2008). Qué conocimientos profesionales deberíamos tener los profesores de ciencias sobre el uso de analogías. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias.*, Vol. 5. Asociación de Profesores Amigos de la Ciencia: EUREKA, España., pp. 15-28. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/920/92050103.pdf>