



Revista MICA.
Volumen 4 No. 7
ISSN: 2594-1933
Periodo: Enero – Junio de 2021
Tepic, Nayarit. México
Pp. 17 - 24
Recibido: Febrero 27 de 2021
Aprobado: Junio 02 de 2021

Las raíces complejas a través de Moivre

Complex roots through Moivre

Autores

Miguel Angel López Santana
Universidad Autónoma de Nayarit
miguel.lopez@uan.edu.mx

Anabel Gómez Valdivia
Universidad de Guadalajara
anabel.gvaldivia@academicos.udg.mx

Las raíces complejas a través de Moivre

Complex roots through Moivre

Resumen

Esta investigación tiene como propósito mostrar las cualidades y beneficios del cálculo de raíces complejas por el método de Moivre. En la cual mediante el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), hoy en día es más fácil y sencillo el proceso de solución por este método. Se presenta la solución a un ejercicio de ecuación diferencial homogénea, en la cual con su fórmula se obtienen las raíces reales y complejas.

Palabras clave: Raíces, Ecuaciones Diferenciales, Numero Complejo, Numero Real, Función Multivaluada.

Abstract

The purpose of this research is to show the qualities and benefits of calculating complex roots by the Moivre method. In which, through the use of Information and Communication Technologies (TICs), today the solution process by this method is easier and simpler. The solution to an exercise of homogeneous differential equation is presented, in which with its formula the real and complex roots are obtained.

Keywords: Roots, Differentia Equations, Complex Number, Real Number, Multivalued Function.

Introducción

En esta investigación se da a conocer la fórmula del matemático británico de origen francés Moivre para calcular potencias de un número complejo z^n , establece que si un número complejo $z = r(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ entonces $z^n = r^n(\cos nx + i \operatorname{sen} nx)$, en donde n pueden ser enteros positivos, negativos y números fraccionarios.

Abraham de Moivre nació en Vitry-le-François, Champagne, Francia el 26 de mayo de 1667 y murió en Londres el 27 de noviembre de 1754. Se dice que en sus orígenes su padre era cirujano, y de familia humilde. Aunque su religión fue de tipo protestante, aun así, obtuvo sus

primeras enseñanzas en una escuela católica, en Vitry. Posteriormente, a la edad de 11 años, estudio en la academia protestante en Sedan, donde pasó 4 años aprendiendo el idioma griego. En 1682 el gobierno cierra esa academia, su siguiente paso en su educación fue a Saumur donde estudió lógica hasta 1684. Coincide que en esa época estudió matemáticas por su cuenta, leyéndose un tratado de Huygens. Posteriormente su familia se muda a Paris, y ahí Abraham pasa al Collège de Harcourt, donde estudia física y matemáticas. . En el año 1685, Louis XIV revoca el edicto de Nantes y comienza la persecución religiosa a los protestantes. Se produce la expulsión de los hugonotes. De Moivre marcha a Londres, donde se convierte en instructor privado de matemáticas. Enseñando también en los cafés. El destino lo lleva en esa época estudiar el “Principia Matemática” de Newton, libro recién publicado e intenta sin éxito obtener una plaza de profesor de matemáticas en alguna universidad. Sin embargo, sus investigaciones si tienen éxito, conoce personalmente a Newton. En marzo de 1695, Halley comunica su primer artículo titulado Method of fluxions a la Royal Society. Siendo elegido, en 1697, miembro de dicha sociedad. En 1710, de Moivre fue designado, por ser una persona estimada por Newton, para la comisión de la Royal Society que debía estudiar las reclamaciones de Leibniz como descubridor del cálculo antes que Newton. Así la Royal Society obtuvo la respuesta que esperaba. Moivre, uno de los científicos matemáticos del siglo XVIII pionero en el desarrollo de la geometría analítica y la teoría de la probabilidad, quizá su más significativa contribución en esta última área, fue la aproximación a la distribución binomial con un gran número de pruebas, pero no fue hasta 1730 cuando estableció la relación trigonométrica para el cálculo de raíces complejas. Moivre es famoso también por predecir el día de su muerte, mediante un cálculo en el que incluía el tiempo que dormía diariamente, de esta manera se dio cuenta de que cada día dormía 15 minutos más, usando una regresión aritmética determino que moriría el día que durmiera 24 horas.

Justificación

Este método es de tipo iterativo, lo cual puede ser tedioso su cálculo, pero con el uso actual de la tecnología como el Smartphone, Tablet, PC, Laptop, en las cuales se puede programar el método, con aplicaciones o software la hoja de cálculo de Excel. Con la tecnología actual utilizar este método es más práctico y sencillo.

Soporte Teórico

El método de Moivre fue enunciado por el matemático en el año 1730, este método asocia números complejos con trigonometría, además de ser necesario aplicar procesos fundamentales del

álgebra. La asociación está dada por medio de las expresiones del seno y coseno, creando una fórmula con la que es posible elevar un número complejo z a una potencia n , que es un número entero positivo mayor o igual a 1. (D'Alessio 2021)

Todo número complejo no nulo tiene exactamente n raíces complejas de orden n . Si se tiene un número complejo en la forma polar $z = r\Theta$, donde r es el módulo del número complejo z , y el ángulo Θ es llamado amplitud o argumento de cualquier número complejo con $0 \leq \Theta \leq 2\pi$, para calcular su n -ésima potencia no será necesario multiplicarlo por sí mismo n -veces; es decir, no es necesario realizar el siguiente producto:

$$Z_n = z * z * z * \dots * z = r\Theta * r\Theta * r\Theta * \dots * r\Theta \quad n\text{-veces.}$$

Por el contrario, el teorema dice que, al escribir z en su forma trigonométrica, para calcular la n -ésima potencia se procede de la siguiente forma:

$$\text{Si } z = r (\cos \Theta + i * \sin \Theta) \text{ entonces } z_n = r^n (\cos n*\Theta + i * \sin n*\Theta).$$

Metodología

En esta investigación se realizarán

Objetivo

Calcular las raíces reales y complejas por el método de Abraham de Moivre.

Hipótesis

El empleo del método de Abraham de Moivre, es una herramienta práctica.

Solución a un ejercicio

En la siguiente ecuación diferencial homogénea (orden ocho), se pide su solución a través de los coeficientes constantes.

$$y^{(8)} - y = 0$$

Entonces para calcular las raíces reales y complejas de esta ecuación, se usará la fórmula de Moivre. Ahora se efectúa el cambio de variable equivalentes, es decir, se cambia las variables diferenciales “ y ” por términos algebraicos como “ m ”.

$$m^8 = y^{(8)} \quad \Rightarrow \quad m^8 - 1 = 0$$

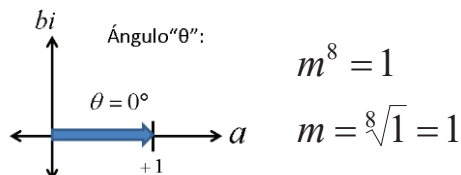
A continuación, la fórmula de Abraham de Moivre:

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

En donde se tomará los valores:

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Como se despejó “m” y es igual a la unidad positiva, es por lo tanto un numero real y su grafica en un plano complejo, nos da un ángulo igual a cero.



Ahora calcularemos las raíces, en este ejercicio son ocho en total (Los cálculos se harán con la calculadora en modo degree).

En el cálculo “n=0”, para “z” uno:

$$z_1 = (1) \left[\cos\left(\frac{0^\circ + 2(0)180^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ + 2(0)180^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_1 = (1) \left[\cos\left(\frac{0^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_1 = (1)[1 + 0] = \boxed{1}$$

En el cálculo “n=1”, para “z” dos:

$$z_2 = (1) \left[\cos\left(\frac{0^\circ + 2(1)180^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ + 2(1)180^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_2 = (1) \left[\cos\left(\frac{360^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_2 = (1)[\cos(45^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ)] = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

En el cálculo “n=2”, para “z” tres:

$$z_3 = (1) \left[\cos\left(\frac{0^\circ + 2(2)180^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ + 2(2)180^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_3 = (1) \left[\cos\left(\frac{720^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{720^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_3 = (1)[\cos(90^\circ) + i \operatorname{sen}(90^\circ)] = (1)[0 + i] = \boxed{+i}$$

En el cálculo “n=3”, para “z” cuatro:

$$z_4 = (1) \left[\cos\left(\frac{0^\circ + 2(3)180^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ + 2(3)180^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_4 = (1) \left[\cos\left(\frac{1080^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1080^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_4 = (1) [\cos(135^\circ) + i \operatorname{sen}(135^\circ)] = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

En el cálculo “n=4”, para “z” cinco:

$$z_5 = (1) \left[\cos\left(\frac{0^\circ + 2(4)180^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ + 2(4)180^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_5 = (1) \left[\cos\left(\frac{1440^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1440^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_5 = (1) [\cos(180^\circ) + i \operatorname{sen}(180^\circ)] = (1)[-1 + 0] = \boxed{-1}$$

En el cálculo “n=5”, para “z” seis:

$$z_6 = (1) \left[\cos\left(\frac{0^\circ + 2(5)180^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ + 2(5)180^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_6 = (1) \left[\cos\left(\frac{1800^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1800^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_6 = (1) [\cos(225^\circ) + i \operatorname{sen}(225^\circ)] = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

En el cálculo “n=6”, para “z” siete:

$$z_7 = (1) \left[\cos\left(\frac{0^\circ + 2(6)180^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ + 2(6)180^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_7 = (1) \left[\cos\left(\frac{2160^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2160^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_7 = (1) [\cos(270^\circ) + i \operatorname{sen}(270^\circ)] = (1)[0 + i] = \boxed{-i}$$

En el cálculo “n=7”, para “z” ocho:

$$z_8 = (1) \left[\cos\left(\frac{0^\circ + 2(7)180^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0^\circ + 2(7)180^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_8 = (1) \left[\cos\left(\frac{2520^\circ}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2520^\circ}{8}\right) \right]$$

$$z_8 = (1) [\cos(315^\circ) + i \operatorname{sen}(315^\circ)] = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i}$$

Una vez calculadas todas las raíces de la ecuación diferencial homogénea, se procede a escribir su solución. Se tiene raíces reales y complejas.

Calculando las soluciones homogéneas para raíces complejas:

$$Y_h = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

Calculando las soluciones homogéneas para raíces reales:

$$Y_h = C_1 e^{(m_1)x} + C_2 e^{(m_2)x} + \dots + C_n e^{(m_n)x}$$

Calculando las raíces reales:

$$Y_h = C_1 e^{(1)x} + C_2 e^{(-1)x}$$

$$Y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Calculando las raíces complejas:

Los valores de alfa y beta:

$$\alpha = 0 \quad \beta = 1$$

$$Y_h = e^{(0)x} (C_3 \cos(1)x + C_4 \operatorname{sen}(1)x)$$

$$Y_h = C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$$

$$\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Y_h = e^{(-\sqrt{2}/2)x} \left(C_5 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_6 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \right)$$

$$Y_h = e^{-\sqrt{2}x/2} C_5 \cos \frac{\sqrt{2}x}{2} + e^{-\sqrt{2}x/2} C_6 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}x}{2}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Y_h = e^{(\sqrt{2}/2)x} \left(C_7 \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C_8 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \right)$$

$$Y_h = e^{\sqrt{2}x/2} C_7 \cos \frac{\sqrt{2}x}{2} + e^{\sqrt{2}x/2} C_8 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}x}{2}$$

La solución general homogénea queda:

$$Yh = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + e^{-\sqrt{2}x/2} C_5 \cos \frac{\sqrt{2}x}{2} + e^{-\sqrt{2}x/2} C_6 \cos \frac{\sqrt{2}x}{2} + e^{\sqrt{2}x/2} C_7 \cos \frac{\sqrt{2}x}{2} + e^{\sqrt{2}x/2} C_8 \cos \frac{\sqrt{2}x}{2}$$

Conclusiones

En este ejercicio se puede analizar, el proceso iterativo por el método de Bairstow, en la cual los usos de las TICs facilitan mucho su cálculo. Podemos observar que la tecnología llegó al rescate de este tipo de métodos, los cuales tenían la desventaja de ser muy tediosos de calcular a mano.

Bibliografía

- Bartolomé, A. (1989). Nuevas Tecnologías y Enseñanza. Barcelona Editorial Graos
- Cabero, J., (1996 febrero) Nuevas Tecnologías, Comunicación Y Educación Universidad de Sevilla Edutec. núm. 1 [Revista Electrónica de Tecnología Educativa] disponible en www.uib.es/depart/dcweb/revelec1.html [consultado enero 10, 2001]
- Índice Revista Estadística y Sociedad (2010) Num.42 “Quien es quien” Abraham de Moivre p2, disponible en <https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/254191> [consultado noviembre 10, 2020]
- D'Alessio Torres, Vincenzo Jesús. (25 de febrero de 2021). Teorema de Moivre. Lifeder. Recuperado de <https://www.lifeder.com/teorema-moivre/>.